



W
28
(8934)

Documento de Trabajo

8934

SHOCKS EN MODELOS DINAMICOS
BAJO PREVISION PERFECTA:
UN ANALISIS DEL CORTO PLAZO

Alejandro Balbás de la Corte
Arturo González Romero

**SHOCKS EN MODELOS DINAMICOS
BAJO PREVISION PERFECTA:
UN ANALISIS DEL CORTO PLAZO**

Alejandro Balbás de la Corte (1)

Arturo González Romero (2)

(1) Profesor del Departamento de Economía Financiera de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad Complutense de Madrid.

(2) Profesor del Departamento de Análisis Económico de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de la Universidad Complutense de Madrid.

RESUMEN

El propósito de este trabajo, es analizar las propiedades de dinámica comparativa de un modelo dinámico no estocástico bajo previsión perfecta con dos ecuaciones diferenciales simultáneas. El modelo presenta estabilidad de punto de silla con respecto a su posición de equilibrio, lo que permite estudiar de forma rigurosa (y sin necesidad de introducir en el modelo comportamientos optimizadores por parte de los agentes) el movimiento de las variables, que tras un shock tienen una única vía de comportamiento no explosivo. El modelo se fundamenta en Blanchard (1981), si bien este autor se limita a dar una solución diagramática del mismo sin entrar en su solución matemática. En este sentido, el trabajo que presentamos expone de una manera exhaustiva, el desarrollo matemático inherente a este tipo de temáticas ya que los razonamientos que se han seguido constituyen un procedimiento general aplicable a todo el conjunto de modelos dinámicos de ecuaciones simultáneas bajo previsión perfecta.

Se analizan cuatro posibles shocks (no anticipado y permanente, anticipado y permanente, no anticipado y transitorio y anticipado y transitorio), y se enuncian de forma totalmente justificada y rigurosa, las hipótesis o supuestos necesarios para fundamentar los resultados, diagramáticos y matemáticos, obtenidos en los cuatro casos. En este sentido, y como consecuencia del desarrollo matemático, quizá una de las conclusiones más notables obtenidas es que la economía está siempre, o casi siempre, muy cerca de algún punto de equilibrio.

ABSTRACT

The object of this paper is to analyze the comparative dynamic properties of a non-stochastic dynamic model with two differential equations under perfect foresight. Since the equilibrium of the model exhibits saddle-point stability, we are able to explore rigorously (without bringing in agents' optimizing behaviour) a move to a new equilibrium through the unique convergence path. The model is based on Blanchard (1981), though this author only presents a diagrammatic study without referring to the mathematical solutions. In this sense, this paper presents in a thorough manner, a formal resolution inherent in this model; the analysis extends its applicability to all kind of dynamic models with simultaneous equations under perfect foresight.

We analyze the effects of monetary or fiscal shocks (unanticipated and permanent, anticipated and permanent, unanticipated and transitory and anticipated and transitory) and establish rigorously the set of hypothesis on which the analysis of the shocks is based. As a consequence of the mathematical analysis, one of the main conclusions obtained, is that the economy will always, or almost always, be very close to the equilibrium point.

UN TRATAMIENTO GENERAL SISTEMÁTICO DE MODELOS
DINÁMICOS CON ECUACIONES SIMULTÁNEAS BAJO -
PREVISIÓN PERFECTA.

I. INTRODUCCIÓN. En este artículo vamos a examinar en términos generales las soluciones de equilibrio y propiedades de dinámica comparativa de un modelo dinámico no estocástico con dos ecuaciones simultáneas. El supuesto fundamental incorporado al modelo, es que los agentes forman sus expectativas en forma racional en el caso especial en que no existe incertidumbre y la información actual disponible sobre el comportamiento actual y futuro de las variables del modelo es completa; en consecuencia, los agentes actuarán como si conocieran el modelo no estocástico de comportamiento dinámico de la economía, y formarán las expectativas en base a él.

Dado que en general dichas expectativas de los agentes hoy sobre el valor de una determinada variable depende no sólo del valor de esta en el próximo periodo sino también de su valor en los periodos sucesivos, la expectativa del agente sobre esta variable deberá referirse a la senda completa de evolución de la misma. Por consiguiente, el modelo económico debe extenderse a todo el conjunto de periodos futuros de la economía, desde el momento en que se produce el shock, hasta en momento en que la economía alcance el nuevo periodo estacionario. Este aspecto está incorporado en el modelo hiperinflacionista de Sargent y Wallace (1973), y está desarrollado más formalmente por Blanchard (1979).

Un modelo diseñado bajo estas características presenta tres tipos alternativos de soluciones de equilibrio, que aparecerán dependiendo de los supuestos relativos al signo y valor de los coeficientes de las variables endógenas (ver por ejemplo Guzmán (1975)). Así, el equilibrio puede ser globalmente estable, globalmente inestable, o puede presentar estabilidad de punto de silla.

Supongamos que se produce una variación en una variable exógena del sistema. El equilibrio estacionario E , se desplazará a otro nuevo E' : si el sistema es globalmente estable, existirán infinitas sendas convergentes al nuevo estado estacionario, siendo imposible identificar las expectativas que los agentes han formado. Alternativamente, si el sistema es globalmente inestable, se dará la situación contraria, no existe ninguna senda convergente al nuevo punto de equilibrio y consecuentemente el comportamiento explosivo del modelo no parece razonable que dure indefinidamente.

Finalmente , si la estabilidad del sistema es de punto de silla , el modelo será también inestable , excepto en el caso específico de que las condiciones iniciales de la economía sitúen a esta en algún punto correspondiente a la senda única de convergencia al equilibrio que es una recta (ver Wilson(1979)). Los incentivos especulativos de los agentes , y el temor al comportamiento explosivo de la economía , determinan en este caso que las expectativas de todos los agentes (a los que suponemos con idéntico grado de información) se ajusten a esta senda. Existirá por tanto una única solución de comportamiento para el modelo bajo expectativas racionales.

A continuación, vamos a realizar un análisis sistemático y riguroso de un modelo dinámico basado fundamentalmente en Blanchard (1981), que presenta estabilidad de punto de silla. En la sección III estudiaremos rigurosamente las propiedades generales de dinámica comparativa del modelo cuando se producen shocks que alteran las variables exógenas con carácter permanente. Pasaremos en la - sección IV al análisis de los shocks transitorios . La sección V resume los principales resultados obtenidos.

II MODELO DINAMICO CON DOS ECUACIONES

El modelo que aquí presentamos es una versión simplificada del dado por Blanchard (1981) . La simplificación consiste en la no consideración del capital , y consecuentemente, de las acciones. Por tanto , sólo se analiza el comportamiento de una economía cerrada de precios fijos , con un único bien y tres activos: dinero bonos a corto , y bonos perpetuos con cupón fijo igual a 1.

En el sector real de la economía , supondremos que la - producción real ajusta en el tiempo al nivel de demanda agregada, que a su vez depende , de la renta corriente (Y) , el tipo de interés a largo (R) , y el nivel exógeno de gasto público(g).

$$Y' = z_1 (g - \gamma Y - \psi R) , \quad 0 < \gamma < 1 \quad \psi > 0 \quad (1)$$

donde $Y' = dY/dt$ denota la variación de la producción en el tiempo , y z_1 es una función de signo invariante¹ .

Examinemos ahora el sector financiero de la economía. En primer lugar , supondremos que los agentes son neutrales ante el riesgo de mantener bonos a corto o bonos perpetuos. Dada la perfecta capacidad de sustitución entre los dos tipos de bonos las condiciones de arbitraje impondrán que el rendimiento de los bonos a corto , el tipo de interés de estos bonos (r) , se iguale al rendimiento esperado de los bonos perpetuos , el tipo de interés de estos bonos (R) mas las ganancias esperadas de capital,

$$r = R - \frac{R^e}{R}$$

(2)

donde $R^e = dR^e/dt$ denota la variación esperada del tipo de interés de los bonos perpetuos. Bajo el supuesto de expectativas racionales, $R^e = R'$, y linealizando la ecuación (2) alrededor del equilibrio estacionario $R^* = r = z_2$, obtenemos ²

$$R' = z_2(R - r) \quad (3)$$

En segundo lugar, supondremos que el mercado de dinero está en continuo equilibrio, luego dado que los dos tipos de bonos son perfectamente sustitutivos, el de bonos también lo estará. El equilibrio en el mercado de dinero requiere que la demanda de saldos reales de dinero, que supondremos dependiente de la renta (Y) y del rendimiento de los activos alternativos (r), se iguale a una oferta monetaria real exógena (m-p). Formalmente,

$$m-p = \phi Y - \lambda r, \quad \phi, \lambda > 0 \quad (4)$$

El modelo dinámico completo para la economía se deriva de (1) (3) y (4). Sustituyendo (4) en (3), reducimos el modelo a un sistema de dos ecuaciones diferenciales simultáneas:

$$Y' = z_1 \epsilon - z_1 \phi Y - \phi R z_1 \quad (1)$$

$$R' = -\frac{z_2}{\lambda} \phi Y + z_2 R + \frac{z_2}{\lambda} (m-p) \quad (5)$$

donde si hacemos

$$a_{11} = -z_1 \phi, \quad a_{12} = -z_1 \phi, \quad a_{21} = -\frac{z_2}{\lambda} \phi, \quad a_{22} = z_2, \quad c_1 = z_1 \epsilon, \quad c_2 = \frac{z_2}{\lambda} (m-p)$$

se obtiene la forma matricial del sistema anterior

$$\begin{pmatrix} Y' \\ R' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (6a)$$

y si por simplicidad de notación hacemos $A = (a_{ij})$ con $i, j = 1, 2$, el sistema se convierte en

$$\begin{pmatrix} Y' \\ R' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} Y \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (6b)$$

De (6a), y como evidentemente se verifica

$$a_{11}, a_{12}, a_{21} < 0, \quad a_{22}, c_1, c_2 > 0$$

se deduce que el determinante de A es negativo ($|A| < 0$) y por tanto A es una matriz regular, es decir, existe su inversa A^{-1} .

Sean λ_1 y λ_2 los autovalores (o valores propios) de A. Se tiene que $\lambda_1 \lambda_2 = |A| < 0$. Dado que λ_1 y λ_2 no pueden ser complejos conjugados³, λ_1 y λ_2 serán reales, y como tienen producto negativo, tendrán el signo opuesto. Llamemos desde este momento λ y $-\mu$ a los autovalores anteriores ($\lambda, \mu > 0$). Por ser estos distintos, la matriz A es diagonalizable, y se puede encontrar una matriz regular M tal que

$$A = M J M^{-1} \quad (7)$$

donde $J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}$ y la matriz M es de la forma $M = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$

siendo (u_1, u_2) un autovector de A asociado a λ y (v_1, v_2) está asociado a $-\mu$. Se verifican por tanto las ecuaciones

$$A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -\mu \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (8a, 8b)$$

De las últimas expresiones se prueba sin dificultad que u_1, u_2, v_1 y v_2 son distintos de cero⁴. Podemos por tanto normalizar ambos vectores, y expresar la matriz M en la forma

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ u & v \end{pmatrix}$$

con $v \neq u$ (M regular) y que siga verificando (7).

La solución del sistema de ecuaciones diferenciales (6b) viene dada en forma matricial por

$$\begin{pmatrix} Y \\ R \end{pmatrix} = M e^{tJ} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{Y} \\ \bar{R} \end{pmatrix} \quad (9a)$$

ver Guzmán (1975), donde h_1 y h_2 son constantes reales y arbitrarias, y donde $\begin{pmatrix} \bar{Y} \\ \bar{R} \end{pmatrix}$

es la solución estacionaria del sistema. Se cumplirá por tanto

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \bar{Y} \\ \bar{R} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \text{de donde} \quad \begin{pmatrix} \bar{Y} \\ \bar{R} \end{pmatrix} = -A^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

La expresión (8a) de forma explícita es

$$\begin{aligned} Y &= \bar{Y} + h_1 e^{\lambda t} + h_2 e^{-\mu t} \\ R &= \bar{R} + h_1 u e^{\lambda t} + h_2 v e^{-\mu t} \end{aligned} \quad (9b)$$

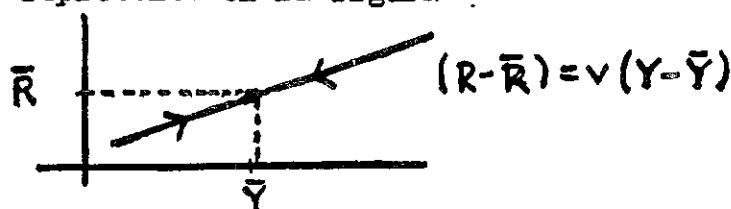
Para $h_1=h_2=0$, se obtiene la solución estacionaria $Y=\bar{Y}$ y $R=\bar{R}$. En el caso en que $h_1 \neq 0$, se deduce de (9b) que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = \infty$$

y estamos ante soluciones inestables. Alternativamente, si $h_1=0$ obtenemos las soluciones

$$\begin{aligned} Y &= \bar{Y} + h_2 e^{-\mu t} \\ R &= \bar{R} + h_2 e^{-\mu t} v \end{aligned} \quad (10)$$

que tienden en el infinito al punto de equilibrio (\bar{Y}, \bar{R}) . Claramente, las soluciones estables dadas por (10) verifican $(R-\bar{R})=v(Y-\bar{Y})$, y por consiguiente, la representación de estas soluciones en el plano (Y, R) es una recta de pendiente v que pasa por el punto (\bar{Y}, \bar{R}) . Este hecho, se representa en la figura



La pendiente de la recta anterior será positiva, si $v > 0$. Para conocer el signo de v , operando en (8b) obtenemos

$$a_{11} + a_{12}v = -\mu$$

$$a_{21} + a_{22}v = -\mu v$$

de la segunda ecuación resulta inmediatamente que $v = \frac{-a_{21}}{a_{22} + \mu}$

y el cociente anterior es claramente positivo por ser $a_{21} < 0$ y $a_{22}, \mu > 0$ por axioma. Analogamente, se puede probar que $u < 0$

Una vez examinadas las propiedades de estabilidad del modelo, vamos a analizar ahora las condiciones de existencia de un único equilibrio bajo la hipótesis de que sólo son válidas-

$$\bar{Y}, \bar{R}, c_1, c_2 \geq 0$$

TEOREMA La condición necesaria y suficiente para que $\bar{Y}, \bar{R}, c_1, c_2 \geq 0$ es que se verifiquen las desigualdades

$$c_1, c_2 \geq 0 \quad \text{y} \quad \frac{a_{21}}{a_{11}} - c_1 \geq c_2 \quad (11)$$

En efecto. Haciendo explícita la expresión $\begin{pmatrix} \bar{Y} \\ \bar{R} \end{pmatrix} = -A^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad (12)$

obtenemos

$$\bar{Y} = \frac{-a_{22}c_1 + a_{12}c_2}{|A|}, \quad \bar{R} = \frac{-a_{11}c_2 + a_{21}c_1}{|A|} \quad (13)$$

Veamos en primer lugar que la condición dada es suficiente. Supongamos que se verifica (11). Se deduce que $-a_{11}c_2 + a_{21}c_1 \leq 0$ (ya que a_{11} es negativo). Como el determinante de A es también negativo, resulta que en (13) es $\bar{R} \geq 0$. Por otro lado, de (13) es

$$\bar{Y} = -\frac{a_{22}}{|A|}c_1 + \frac{a_{12}}{|A|}c_2.$$

Dado que $-\frac{a_{22}}{|A|} > 0$, se puede sustituir c_1 por otra cantidad menor que es $\frac{a_{11}}{a_{21}}c_2$, y obtenemos

$$\bar{Y} \geq -\frac{a_{22}}{|A|}\frac{a_{11}}{a_{21}}c_2 + \frac{a_{12}}{|A|}c_2$$

donde operando se llega a

$$\bar{Y} \geq \frac{c_2}{-a_{21}}$$

y como $c_2 \geq 0$ y $-a_{21} > 0$, obtenemos $\bar{Y} \geq 0$.

Para ver que las condiciones de (11) son suficientes, supongase que en efecto $\bar{Y}, \bar{R}, c_1, c_2 \geq 0$. Al ser $\bar{R} \geq 0$ de (13)

$$\frac{-a_{11}c_2 + a_{21}c_1}{|A|} \geq 0$$

Como $|A| < 0$, debe ser $-a_{11}c_2 + a_{21}c_1 \leq 0$ y de esto último y de que $a_{11} < 0$ se deduce inmediatamente (11).

Con el teorema anterior garantizamos la no negatividad de las soluciones de equilibrio. Vamos ahora a investigar las propiedades de estática comparativa de los equilibrios del modelo. El siguiente teorema establece estos resultados:

TEOREMA Sean (c_1, c_2) y (\bar{c}_1, \bar{c}_2) dos conjuntos alternativos de parámetros que verifican las condiciones (11). Los equilibrios estacionarios asociados vendrán dados por

$$\begin{pmatrix} \bar{Y} \\ \bar{R} \end{pmatrix} = -A^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \bar{\bar{Y}} \\ \bar{\bar{R}} \end{pmatrix} = -A^{-1} \begin{pmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \end{pmatrix}$$

a) Si $\bar{c}_1 \geq c_1$ y $\bar{c}_2 = c_2$ entonces $\bar{\bar{Y}} \geq \bar{Y}$ y $\bar{\bar{R}} \geq \bar{R}$

b) Si $\bar{c}_1 = c_1$ y $\bar{c}_2 \geq c_2$, entonces $\bar{\bar{Y}} \geq \bar{Y}$ y $\bar{\bar{R}} \leq \bar{R}$.

En el caso de que los dos parámetros (c_1, c_2) sean alterados,

la variación del punto de equilibrio responde a varias alternativas que no analizaremos para no alargar.

Para demostrar a) y b) , notamos que de (13) se deduce

$$\bar{Y} = -\frac{a_{22}}{|A|} c_1 + \frac{a_{12}}{|A|} c_2 \quad : \quad \bar{Y} = -\frac{a_{22}}{|A|} \bar{c}_1 + \frac{a_{12}}{|A|} \bar{c}_2$$

Como $-\frac{a_{22}}{|A|} , \frac{a_{12}}{|A|} > 0$, si $\bar{c}_1 \geq c_1$ o $\bar{c}_2 \geq c_2$ entonces $\bar{Y} \geq Y$

Por otro lado , de (13) también se tiene

$$\bar{R} = -\frac{a_{11}}{|A|} c_2 + \frac{a_{21}}{|A|} c_1 \quad : \quad \bar{R} = -\frac{a_{11}}{|A|} \bar{c}_2 + \frac{a_{21}}{|A|} \bar{c}_1$$

y de $-\frac{a_{11}}{|A|} < 0$ y $\frac{a_{21}}{|A|} > 0$, al aumentar c_2 disminuye \bar{R} y al aumentar c_1 aumenta \bar{R} .

Si aumentan simultáneamente c_1 y c_2 , el efecto sobre \bar{Y} será de aumento según lo anterior mientras que sobre \bar{R} , dependerá de los valores de los coeficientes a_{21} a_{11} . Cuanto mayor sea a_{11} y menor a_{21} , mas "probable" es que \bar{R} disminuya.

Los resultados obtenidos están de acuerdo con los convencionales de corte Keynesiano . Desplazamientos hacia equilibrios asociados con mayores gastos fiscales , determinan aumentos en el nivel del output a costa de sufrir mayores tipos de interés. Desplazamientos hacia equilibrios asociados con mayor oferta monetaria , determinan una reducción de los tipos de interés que permiten una expansión en nivel de output. Desplazamientos hacia equilibrios asociados con mayores gastos fiscales y mayores ofertas monetarias, determinan un aumento en el nivel de output, aunque el efecto sobre el tipo de interés queda indeterminado: cuando mayor es la elasticidad de la demanda de dinero con respecto a los tipos de interés (menor a_{21}) y mayor la propensión marginal a consumir (mayor a_{11}) mas fácil es una caída en los tipos de interés.

En general , es fácil detectar que en este modelo la política fiscal será mas efectiva que la política monetaria , cuanto mas elástica sea la demanda de dinero y mas inelástica la de inversión con respecto a los tipos de interés(cuanto menores sean los coeficientes a_{21} y a_{12}) , mientras que cuanto mayor sea la elasticidad de la demanda de dinero con respecto a la renta , y menor la propensión marginal a gastar en esa economía (cuanto mayor sea el coeficiente a_{21} y menor el a_{11}) mayor será la efectividad de la

política monetaria respecto a la fiscal.

III DINAMICA COMPARATIVA . SHOCKS PERMANENTES ANTICIPADOS Y NO ANTICIPADOS

Vamos a estudiar en primer lugar las propiedades de dinámica comparativa que el modelo presenta cuando se produce un shock permanente. Para ello vamos a especificar cuidadosamente el conjunto de hipótesis fundamentales en las que se basa el análisis: aspecto este que no está hecho explícito en los modelos de economía dinámica generalmente utilizados.

i) Supondremos que la economía se encuentra en estado estacionario en el momento t_0 , que es el instante en que se anuncia la implementación de una determinada medida que se realizará en el instante t_1 (naturalmente $t_1 \geq t_0$)

ii) La economía tiende al nuevo estado estacionario después de t_1 . La racionalización de este supuesto se deriva del hecho de que en la realidad alteraciones en la política económica seguida por las autoridades o shocks externos o internos, no determinan comportamientos explosivos de la economía.⁵

iii) Dado que la estabilidad del equilibrio presenta solamente una senda convergente, el modelo requiere de algún grado de flexibilidad que permita a las variables situarse en ella una vez se ha producido el shock. Así, mientras que suponemos que la variable Y es predeterminada y presenta condición inicial, también suponemos que R es una variable no predeterminada, y presenta condición temporal. Esta hipótesis hace que $Y(t)$ sea una función continua de t , y por tanto no puede tener saltos en ningún instante, mientras que $R(t)$ si puede saltar para cumplir una condición terminal. Esta característica de flexibilidad del modelo permitirá que la economía alcance tras un shock la nueva senda convergente al equilibrio.

iv) La variable no-predeterminada R , si salta va a hacerlo en t_0 momento en que se tiene la noticia. La racionalización de este supuesto descansa en que si existen probabilidades de ganancias especulativas para los agentes, estas serán aprovechadas desde t_0 y no después. Además, esta hipótesis como veremos suaviza la evolución de la economía, evitando movimientos mas bruscos de las variables que estarían en contra del tipo de evolución cíclica experimentado por las economías.

CASO 1. Shock Anticipado y Permanente

Las autoridades anuncian en el instante t_0 un cambio de c_1 a \bar{c}_1 que será implementado en el momento t_1 . Si suponemos que la economía está inicialmente en el estado estacionario (\bar{Y}, \bar{R}) y pretende llegar al nuevo estado estacionario (\bar{Y}, \bar{R}) después de t_1 , sólo lo podrá lograr

si en el instante t_1 se encuentra situada en la senda convergente a (\bar{Y}, \bar{R}) que según (10) está dada por las ecuaciones

$$Y = \bar{Y} + h_2 e^{-\mu t}$$

$$R = \bar{R} + h_2 v e^{-\mu t}$$

con h_2 constante. Para estar en esta senda en t_1 , se deben verificar en el intervalo (t_0, t_1) las condiciones,

$$\begin{pmatrix} Y' \\ R' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} Y \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$Y(t_1) - \bar{Y} = 1/v (R(t_1) - \bar{R})$$

donde $(Y(t_1), R(t_1))$ representa el valor de las variables Y y R en t_1 . De (9b) deducimos que en (t_0, t_1) se cumplirá

$$Y = \bar{Y} + h_1 e^{\lambda t} + h_2 e^{-\mu t}$$

$$R = \bar{R} + h_1 u e^{\lambda t} + h_2 v e^{-\mu t} \quad (14)$$

$$Y(t_1) - \bar{Y} = \frac{1}{v} (R(t_1) - \bar{R})$$

siendo h_1 y h_2 constantes a determinar. Utilizamos ahora la hipótesis de que $Y(t)$ es una variable predeterminada mientras que $R(t)$ no lo es, junto con el supuesto de que $R(t)$ salta en t_0 . De (14) se deduce

$$\bar{Y} + h_1 e^{\lambda t_1} + h_2 e^{-\mu t_1} - \bar{Y} = \frac{1}{v} (\bar{R} + h_1 u e^{\lambda t_1} + h_2 v e^{-\mu t_1} - \bar{R})$$

y por tanto

$$h_1 = \frac{e^{-\lambda t_1}}{v-u} ((\bar{R}-\bar{R}) - v(\bar{Y}-\bar{Y}))$$

que sustituyendo en (14) da

$$Y = \bar{Y} - \frac{1}{v-u} w e^{\lambda(t-t_1)} + h_2 e^{-\mu t} \quad (15)$$

$$R = \bar{R} - \frac{u}{v-u} w e^{\lambda(t-t_1)} + h_2 v e^{-\mu t}$$

donde

$$w = v(Y - \bar{Y}) - (\bar{R} - \bar{R}) \quad (15b)$$

Si además pretendemos que Y no salte en t_0 , (15) debe dar \bar{Y} para $t=t_0$ y en consecuencia

$$h_2 = \frac{-1}{u-v} w e^{\lambda(t_0-t_1) + \mu t_0}$$

que sustituido en (15a) permite llegar finalmente a la expresión para Y , R en el periodo (t_0, t_1) . Esta expresión es

$$Y = \bar{Y} - \frac{w}{v-u} e^{\lambda(t-t_1)} - \frac{w}{u-v} e^{\lambda(t_0-t_1)+\mu(t_0-t)} \quad (16)$$

$$R = \bar{R} - \frac{uw}{v-u} e^{\lambda(t-t_1)} - \frac{vw}{u-v} e^{\lambda(t_0-t_1)+\mu(t_0-t)}$$

De (16) y haciendo operaciones se deduce que el salto de R en t_0 tendrá por valor $S=R(t_0)-\bar{R}$ que es

$$S = e^{-\lambda \Delta t} w \quad \text{donde } \Delta t = t_1 - t_0 \quad (17)$$

Pasemos ahora a examinar tres sub-casos. Supongamos primero que $w > 0$. De (15b) se obtiene $\bar{R} < \bar{R} + v(\bar{Y} - \bar{Y})$, es decir, el punto (\bar{Y}, \bar{R}) está debajo de la senda convergente a (\bar{Y}, \bar{R}) . En este caso, (17) nos dice que el salto es positivo, y menor cuanto mayor sea Δt . Luego el salto de la variable no-predeterminada será mas suave cuanto mayor espacio de tiempo transcurra entre el anuncio y la implementación, y mas brusco cuanto menor sea este intervalo temporal. Esto racionaliza la hipótesis iv), pues si la economía decidiera esperar y saltar despues de t_0 (antes de t_1) Δt disminuiría y S aumentaría con lo que se enfrentaría a un salto mas brusco.

En segundo lugar, supongamos que $w=0$. Entonces de (15b) se deduce que (\bar{Y}, \bar{R}) está en la senda de convergencia a (\bar{Y}, \bar{R}) . De (17) se deduce que el salto de la variable R es cero y de (16) que $Y=\bar{Y}$ y $R=\bar{R}$ en (t_0, t_1) . Por tanto la economía se mantendría en estado estacionario durante el periodo de transición entre anuncio e implementación, y después de dicha implementación comenzaría la convergencia a (\bar{Y}, \bar{R}) .

Como tercer sub-caso, sea $w < 0$. Entonces $\bar{R} > \bar{R} + v(\bar{Y} - \bar{Y})$. el punto (\bar{Y}, \bar{R}) está ahora encima de la recta de convergencia. De (17) se deduce que el salto es negativo, lo que quiere decir que la variable R debe disminuir en t_0 . El salto, resulta ser también menor, cuanto mayor es Δt , lo cual ratifica nuevamente la hipótesis iv).

Como aplicación de esta solución general, y a modo de ejemplo vamos a estudiar el caso en que se anuncia un shock fiscal positivo (c_1 aumenta y c_2 permanece constante). Del teorema segundo de la sección precedente, en el nuevo equilibrio tendremos $\bar{Y} > \bar{Y}$ y $\bar{R} > \bar{R}$. Si (c_1, c_2) verifican (11), con mas razón lo harán (\bar{c}_1, c_2) , y en consecuencia la no negatividad de \bar{Y} , \bar{R} , \bar{Y} , \bar{R} está garantizada (teorema 1)

De (13) se deduce facilmente que

$$\bar{Y} - \bar{Y} = \left(-\frac{a_{22}}{|A|}\right)(c_1 - \bar{c}_1) \quad , \quad \bar{R} - \bar{R} = \left(\frac{a_{21}}{|A|}\right)(c_1 - \bar{c}_1)$$

de donde

$$\frac{\bar{R} - \bar{R}}{\bar{Y} - \bar{Y}} = -\frac{a_{21}}{a_{22}}$$

Por otro lado , anteriormente hemos demostrado la igualdad $v = \frac{-a_{21}}{a_{22} + \mu}$

Dado que $-a_{21} > 0$ y $a_{22} + \mu > a_{22} > 0$, resulta inmediatamente

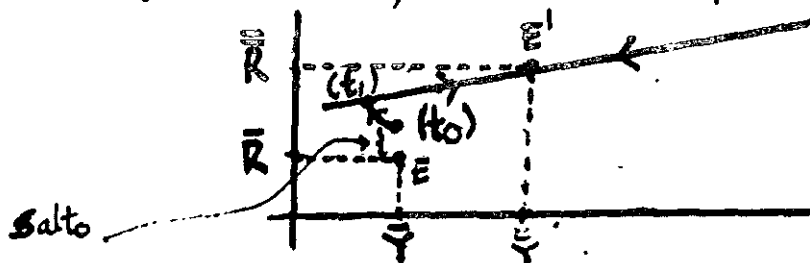
$$v < \frac{\bar{R} - \bar{R}}{\bar{Y} - \bar{Y}}$$

y como consecuencia inmediata $w > 0$. Luego estamos en el primer subcaso antes aludido. El equilibrio inicial está por debajo de la senda convergente al equilibrio final, y naturalmente (16) y (17) nos dan respectivamente la evolución de Y, R en el periodo (t_0, t_1) y el valor del salto de R en t_0 .

Derivando en (16) con respecto a t , resulta

$$\begin{aligned} Y' &= -\frac{w\lambda}{v-u} e^{\lambda(t-t_1)} - \frac{w\mu}{v-u} e^{\lambda(t_0-t_1) + \mu(t_0-t)} \\ R' &= -\frac{uw\lambda}{v-u} e^{\lambda(t-t_1)} - \frac{mw\mu}{v-u} e^{\lambda(t_0-t_1) + \mu(t_0-t)} \end{aligned} \quad (18)$$

y por los signos obtenidos para u, v y w se tiene que $Y' < 0$, o lo que es lo mismo Y es una función decreciente de t en (t_0, t_1) , es decir, Y se aleja del valor \bar{Y} ; similarmente, es fácil demostrar que $R' > 0$.



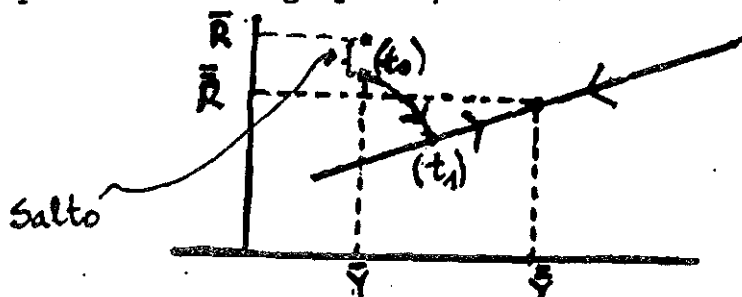
Este resultado , diagramáticamente expuesto por Blanchard (1981) queda aquí demostrado formalmente, siendo (16) las ecuaciones específicas de moción de las variables Y, R durante el periodo de transición. Así pues , políticas fiscales expansivas pueden tener efectos contractivos sobre el output y el empleo de la economía si son anticipadas por los agentes debido a que los incrementos especulativos de estos forzarán un alza inmediata de los tipos de interés. Además , cuanto mayor sea el periodo de transición , mas se anticipan los agentes , y mas tiempo permanecen en la economía unos tipos de interés demasiado altos , y consecuentemente, mas intensa es la depresión.

Analicemos ahora el caso de un shock monetario positivo. Suponemos que aumenta c_2 y c_1 permanece fijo . Supondremos además que se verifica (11) para los valores iniciales y finales de las c_i .

Del teorema 2 se deduce que $\bar{Y} > \bar{Y}$ y $\bar{R} < \bar{R}$. Luego se verifica que

$$w = v(\bar{Y} - \bar{Y}) - (\bar{R} - \bar{R}) < 0$$

con lo que estamos dentro del tercer sub-caso y el equilibrio final está por debajo de la recta convergente al final. Nuevamente (16) y (17) son las expresiones que dan el movimiento de las variables en la transición y el valor del salto de la variable no predeterminada en t_0 respectivamente. Nuevamente (18) nos da el valor de Y' en (t_0, t_1) y como ahora $w < 0$ se deduce que $Y' > 0$ y la variable Y crece para acercarse al valor \bar{Y} . Simultáneamente, R ahora $\omega, R' < 0$, y rebasa la posición del equilibrio a largo plazo, fenómeno llamado "overshooting".



Este resultado señala la posibilidad de que políticas monetarias expansivas que son anticipadas por los agentes tengan efectos positivos sobre el nivel de output de la economía, incluso antes de que la medida se implemente. De nuevo que los agentes actúan de forma especulativa en los mercados financieros, presionando el tipo de interés a la baja de forma tan fuerte que incluso rebasará el valor de equilibrio a largo plazo. Evidentemente, cuanto mayor sea la anterioridad con la que los agentes se anticipan, menor será el overshooting del tipo de interés, pero mayor será el tiempo de durante el cual la economía convive con tipos de interés demasiado bajos, por lo que mayor será la expansión del output y más cerca se encontrará este de su futuro valor a largo plazo.

Finalmente, se podría también analizar el caso en que c_1 o c_2 disminuyen y otros combinados. No lo hacemos por no alargar innecesariamente el trabajo, pero en cualquier caso, todas estas posibilidades están gobernadas por (16) y (17)

CASO 2 Shock No Anticipado y Permanente

Ahora las autoridades anuncian el cambio de c_i a \bar{c}_i ($i=1,2$) en el mismo instante en que lo implementan t_1 ($t_0=t_1$). Mantenemos las hipótesis i ii iii y iv.

Después de t_0 el sistema debe estar gobernado por

$$\begin{pmatrix} Y' \\ R' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} Y \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \end{pmatrix}$$

y por tanto las soluciones convergentes al estado estacionario

$$\begin{pmatrix} \bar{Y} \\ \bar{R} \end{pmatrix} = -A^{-1} \begin{pmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \end{pmatrix}$$

serán de la forma

$$\begin{aligned} Y &= \bar{Y} + h_2 e^{-\mu t} \\ R &= \bar{R} + h_2 v e^{-\mu t} \end{aligned}$$

con h_2 constante a determinar. Bajo la hipótesis (iii), Y es una variable predeterminada y por consiguiente no salta en t_0 . Luego para $t=t_0$ obtenemos

$$\bar{Y} = \bar{Y} + h_2 e^{-\mu t_0}$$

de donde

$$h_2 = e^{\mu t_0} (\bar{Y} - \bar{Y})$$

y por tanto, la senda convergente a (\bar{Y}, \bar{R}) que toman las variables Y, R después de t_0 es

$$\begin{aligned} Y &= \bar{Y} + (\bar{Y} - \bar{Y}) e^{\mu(t_0-t)} \\ R &= \bar{R} + (\bar{Y} - \bar{Y}) v e^{\mu(t_0-t)} \end{aligned} \quad (19)$$

y si nos situamos en el momento crítico $t=t_0$ (19) se reduce a

$$R(t_0) = \bar{R} + v(\bar{Y} - \bar{Y})$$

y por tanto el salto vendrá dado por

$$s = v(\bar{Y} - \bar{Y}) - (\bar{R} - \bar{R}) \quad (20)$$

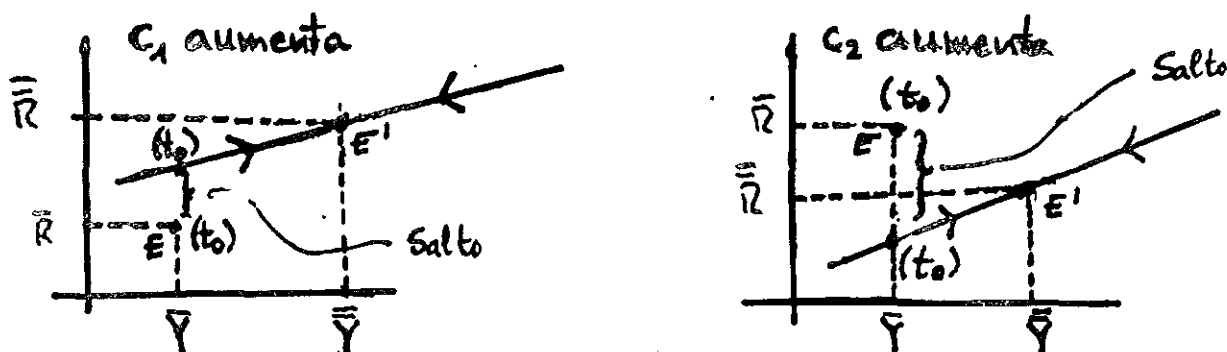
que es el valor al que anteriormente llamamos w . Notese que (20) se deduce también de (17), si hacemos $t_1 - t_0 = 0$

Ahora podemos volver a considerar los tres sub-casos del apartado anterior, según que el equilibrio (\bar{Y}, \bar{R}) esté situado encima, en, o debajo de la senda convergente al equilibrio (\bar{Y}, \bar{R}) .

Un caso particular importante del primer sub-caso es aquel en el que se produce un shock fiscal, de forma que c_1 aumenta y c_2 queda fijo ($\bar{c}_1 > c_1$ y $\bar{c}_2 = c_2$). Por el teorema 2, sabemos que el nuevo equilibrio estacionario será tal que $\bar{Y} > \bar{Y}$ y $\bar{R} > \bar{R}$. Tal y como se probó en el caso anticipado y permanente, es claro que $v(\bar{Y} - \bar{Y}) - (\bar{R} - \bar{R}) > 0$, y el equilibrio estacionario inicial está debajo de la senda convergente al equilibrio final. Dado que ahora la fecha del anuncio y la implementación coinciden, y la economía debe converger al nuevo equilibrio (hipótesis ii), tendrá que situarse en t_0 en algún punto de la senda convergente a dicho equilibrio. Puesto que la variable Y no salta es R quien lo hace, y el valor de dicho salto viene dado por (20). En este caso no se aprecian

efectos contractivos sobre el nivel de output.⁶

Alternativamente, podemos estudiar el caso de un shock monetario de forma que c_2 aumenta y c_1 permanece fija ($\bar{c}_2 > c_2$, $\bar{c}_1 = c_1$). Por el teorema 2 es ahora $\bar{Y} > \bar{Y}$, $\bar{R} < \bar{R}$, y como en el caso anticipado y permanente se verifica que $w > 0$. Estamos por tanto en el caso en que la senda de convergencia está por encima del equilibrio inicial. En consecuencia la variable R saltará negativamente (disminuirá) y el valor del salto vuelva a estar dado por (20). Es interesante notar que en este caso en que los agentes no anticipan la medida ($t_1 - t_0 = 0$) y el nivel de producción esté predeterminado, el "overshooting" es máximo.⁷



IV DINAMICA COMPARATIVA. SHOCKS TRANSITORIOS ANTICIPADOS Y NO ANTICIPADOS

Pasamos ahora a estudiar las propiedades de la dinámica comparativa del modelo cuando se producen shocks transitorios. Las hipótesis son idénticas a las utilizadas en la sección anterior, excepto la hipótesis (ii). Ahora suponemos que la convergencia hacia el equilibrio estacionario tendrá lugar después de t_2 , momento en que se cancela la medida transitoria implementada. Logicamente, el equilibrio a largo plazo coincide en este caso con el equilibrio inicial

CASO 3 Shock Anticipado y Transitorio

En el instante t_0 el gobierno anuncia que c_i ($i=1,2$) cambiará a \bar{c}_i en el momento t_1 , y volverá a su valor inicial c_i en tiempo t_2 donde $t_2 > t_1 > t_0$.

En t_1 , c_1 y c_2 cambian a \bar{c}_1 y \bar{c}_2 , de donde las soluciones del sistema dinámico de acuerdo a la ecuación (9b) son

$$\begin{aligned} Y &= \bar{Y} + h_1 e^{\lambda t} + h_2 e^{-\mu t} \\ R &= \bar{R} + h_1 u e^{\lambda t} + h_2 v e^{-\mu t} \end{aligned} \quad (t_1, t_2)$$

Donde como siempre h_1 y h_2 son parámetros a determinar. En el instante t_2 Y y R deben estar en la senda de convergencia a (\bar{Y}, \bar{R}) , que como hemos visto anteriormente se deriva del sistema anterior haciendo $h_1 = 0$. Por tanto se verificará,

$$v(Y(t_2) - \bar{Y}) = (R(t_2) - \bar{R})$$

Sustituyendo $Y(t_2)$ y $R(t_2)$ por sus respectivos valores derivados del sistema anterior, tenemos

$$v(\bar{Y} + h_1 e^{\lambda t_2} + h_2 e^{-\mu t_2} - \bar{Y}) = \bar{R} + h_1 u e^{\lambda t_2} + h_2 v e^{-\mu t_2} - \bar{R}$$

donde operando tenemos

$$v(\bar{Y} - \bar{Y}) + h_1 v e^{\lambda t_2} = (\bar{R} - \bar{R}) + h_1 u e^{\lambda t_2}$$

Luego

$$h_1 = \frac{v}{v-u} e^{-\lambda t_2}$$

siendo el w el dado anteriormente. Sustituyendo en las expresiones de solución para Y y R , (ecuación (9b)), se obtiene

$$\left. \begin{aligned} Y &= \bar{Y} + \frac{w}{v-u} e^{\lambda(t-t_2)} + h_2 e^{-\mu t} \\ R &= \bar{R} + \frac{uw}{v-u} e^{\lambda(t-t_2)} + h_2 v e^{-\mu t} \end{aligned} \right\} (t_1, t_2) \quad (21)$$

Posteriormente determinaremos h_2 .

En el intervalo temporal (t_0, t_1) , las soluciones serán de la forma

$$\left. \begin{aligned} Y &= \bar{Y} + h_1' e^{\lambda t} + h_2' e^{-\mu t} \\ R &= \bar{R} + h_1' u e^{\lambda t} + h_2' v e^{-\mu t} \end{aligned} \right\} (t_0, t_1)$$

donde h_i' ($i=1,2$) son constantes a determinar. Puesto que la variable Y no salta en t_0 , tenemos que $Y(t_0) = \bar{Y}$, lo que sustituido en la ecuación para Y nos lleva a

$$\bar{Y} = \bar{Y} + h_1' e^{\lambda t_0} + h_2' e^{-\mu t_0}$$

y por tanto

$$h_2' = -h_1' e^{(\lambda + \mu)t_0}$$

con lo que el sistema de soluciones para (t_0, t_1) se convierte en

$$\left. \begin{aligned} Y &= \bar{Y} + h_1' e^{\lambda t} - h_1' e^{\lambda t_0 + \mu(t_0 - t)} \\ R &= \bar{R} + h_1' u e^{\lambda t} - h_1' v e^{\lambda t_0 + \mu(t_0 - t)} \end{aligned} \right\} (t_0, t_1) \quad (22)$$

Notese que las soluciones (21) y (22) deben coincidir para $t=t_1$ lo que nos lleva al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\bar{Y} + \frac{w}{v-u} e^{\lambda(t_1-t_2)} + h_2 e^{-\mu t_1} &= \bar{Y} + h_1' e^{\lambda t_1} - h_1' e^{\lambda t_0 + \mu(t_0-t_1)} \\ \bar{R} + \frac{uw}{v-u} e^{\lambda(t_1-t_2)} + h_2 v e^{-\mu t_1} &= \bar{R} + h_1' u e^{\lambda t_1} - h_1' v e^{\lambda t_0 + \mu(t_0-t_1)}\end{aligned}\quad (23)$$

Sistema que se puede expresar matricialmente y resolver por la regla de Cramer (ver Apéndice 1), obteniendo así los valores de h_2 y h_1'

$$h_2 = \frac{w}{v-u} e^{\lambda(t_0-t_1) + \mu t_0} - \frac{u(\bar{Y}-\bar{Y}) - (\bar{R}-\bar{R})}{v-u} e^{\lambda t_1} - \frac{w}{v-u} e^{\lambda(t_0-t_2) + \mu t_0}$$

$$h_1' = \frac{w}{v-u} (e^{-\lambda t_2} - e^{-\lambda t_1})$$

Sustituyendo el valor de h_2 en (21), determinamos la solución para Y, R en el periodo (t_1, t_2) . Esta será

$$\left. \begin{aligned}Y &= \bar{Y} + \frac{w}{v-u} e^{\lambda(t-t_2)} + \frac{w}{v-u} e^{\lambda(t_0-t_1) + \mu(t_0-t)} - \frac{w'}{v-u} e^{\mu(t_1-t)} - \\ &\quad - \frac{w}{v-u} e^{\lambda(t_0-t_2) + \mu(t_0-t)} \\ R &= \bar{R} + \frac{uw}{v-u} e^{\lambda(t-t_2)} + \frac{vw}{v-u} e^{\lambda(t_0-t_1) + \mu(t_0-t)} - \\ &\quad - \frac{w'}{v-u} e^{\mu(t_1-t)} - \frac{vw}{v-u} e^{\lambda(t_0-t_2) + \mu(t_0-t)}\end{aligned} \right\} \begin{matrix} (t_1, t_2) \\ (24) \end{matrix}$$

donde ⁹

$$w' = u(\bar{Y}-\bar{Y}) - (\bar{R}-\bar{R}) \quad (24b)$$

Si sustituimos el valor de h_1' en (22), obtenemos la solución para Y, R en el periodo (t_0, t_1)

$$\left. \begin{aligned}Y &= \bar{Y} + \frac{w}{v-u} (e^{\lambda(t-t_2)} - e^{\lambda(t-t_1)}) - \frac{w}{v-u} e^{\mu(t_0-t)} (e^{\lambda(t_0-t_2)} - e^{\lambda(t_0-t_1)}) \\ R &= \bar{R} + \frac{wu}{v-u} (e^{\lambda(t-t_2)} - e^{\lambda(t-t_1)}) - \frac{wv}{v-u} e^{\mu(t_0-t)} (e^{\lambda(t_0-t_2)} - e^{\lambda(t_0-t_1)})\end{aligned} \right\} \begin{matrix} (t_0, t_1) \\ (25) \end{matrix}$$

y en consecuencia el salto de la variable R en el instante t_0 debe de venir dado por la siguiente expresión ,

$$S = R(t_0) - \bar{R} = w(e^{\lambda(t_0-t_1)} - e^{\lambda(t_0-t_2)}) \quad (26)$$

Observando (26), se aprecia como de nuevo el signo del salto depende del signo de w , ya que al ser $t_2 > t_1$ se sigue $t_0 - t_1 > t_0 - t_2$ y en consecuencia $e^{\lambda(t_0-t_1)} > e^{\lambda(t_0-t_2)}$.

Podríamos estudiar por tanto, los tres sub-casos alternativos analizados en el shock anticipado permanente, pero no lo haremos por no alargar excesivamente el trabajo.

Es interesante notar también, que para t_2 y t_0 fijos, el salto es menos brusco cuanto mayor es t_1 , es decir, cuanto mayor es el intervalo de tiempo que transcurre entre el anuncio y la implementación de la noticia. Nuevamente tenemos una justificación de la hipótesis (iv).

A la expresión (26) llamémosla $S(t_0, t_1, t_2)$, y hagamos $S^* = we^{\lambda(t_0-t_1)}$ que es la expresión del salto obtenida en el caso anticipado y permanente (ver (17)). Es claro que si fijamos t_0 y t_1 , se verifica

$$S^*(t_0, t_1) = \lim_{t_2 \rightarrow \infty} S(t_0, t_1, t_2) \quad (27)$$

Sea ahora $Y(t, t_0, t_1, t_2)$ y $R(t, t_0, t_1, t_2)$ las expresiones dadas para Y, R en el periodo (t_0, t_1) (ver (25)). Finalmente, sean $Y^*(t, t_0, t_1)$ y $R^*(t, t_0, t_1)$ las obtenidas en el caso permanente (ver (16)). Es evidente que

$$\lim_{t_2 \rightarrow \infty} Y(t, t_0, t_1, t_2) = Y^*(t, t_0, t_1) \quad (28)$$

$$\lim_{t_2 \rightarrow \infty} R(t, t_0, t_1, t_2) = R^*(t, t_0, t_1)$$

para t, t_0, t_1 fijos y $t \in (t_0, t_1)$

Si además llamamos $\check{Y}(t, t_0, t_1, t_2)$ y $\check{R}(t, t_0, t_1, t_2)$ a los valores de Y, R en el periodo (t_1, t_2) (ver (24)) se demuestra sin dificultad

$$\frac{\lim_{t_2 \rightarrow \infty} \check{Y}(t, t_0, t_1, t_2) - \bar{Y}}{\lim_{t_2 \rightarrow \infty} \check{R}(t, t_0, t_1, t_2) - \bar{R}} = \frac{1}{v} \quad (29)$$

y por consiguiente si t_2 es relativamente alto, Y y R tienden a estar en la senda convergente a (\bar{Y}, \bar{R}) . Las expresiones (27) (28) y (29) nos permiten afirmar que si t_2 es lo suficientemente grande, es decir, el periodo de duración de la medida transitoria es grande, entonces

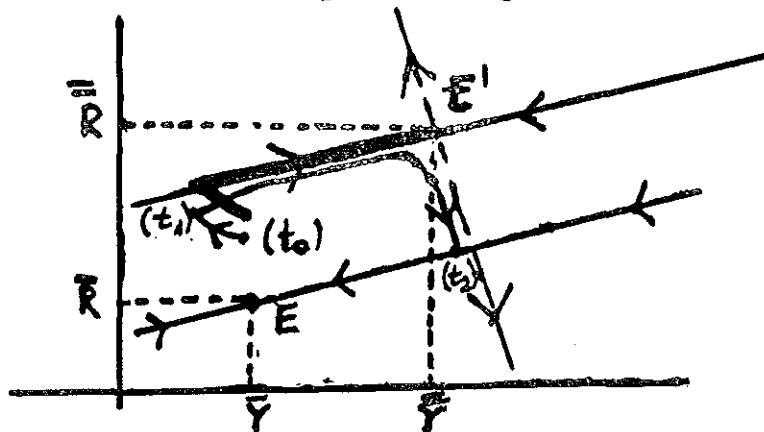
el comportamiento de la economía es muy similar al del caso 1. Dicho de otra forma, los shocks anticipados permanentes son casos límite ($t_2 \rightarrow \infty$) de los anticipados transitorios

Analicemos ahora en este marco los efectos de un shock fiscal ($\bar{c}_1 > c_1$, $\bar{c}_2 = c_2$). Derivando en el sistema de ecuaciones (25) con respecto al tiempo, obtenemos la evolución de las variables Y, R desde el instante t_0 en que los agentes anticipan la noticia hasta el momento t_1 en que esta se implementa,

$$\left. \begin{aligned} Y' &= \frac{w\lambda}{v-u} (e^{\lambda(t-t_2)} - e^{\lambda(t-t_1)}) + \frac{w\lambda}{v-u} e^{\lambda(t_0-t)} (e^{\lambda(t_0-t_2)} - e^{\lambda(t_0-t_1)}) \\ R' &= \frac{w\lambda}{v-u} (e^{\lambda(t-t_2)} - e^{\lambda(t-t_1)}) + \frac{w\lambda}{v-u} e^{\lambda(t_0-t)} (e^{\lambda(t_0-t_2)} - e^{\lambda(t_0-t_1)}) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Como $w > 0$ y $t_2 > t_1$, es inmediato que $Y' < 0$ y en consecuencia Y decrece en el periodo (t_0, t_1) ; también es fácil demostrar que $R' > 0$.

Por otro lado, la recta $u(\bar{Y}-\bar{Y}) = (R-\bar{R})$ representa una senda solución del sistema de ecuaciones diferenciales que es divergente al infinito⁸ y en consecuencia, la trayectoria del sistema durante el periodo de actuación de la medida dada por (24), no puede tocar esta recta por el teorema de existencia y unicidad de soluciones de las ecuaciones diferenciales (ver Guzmán (1975)). Luego la evolución del sistema debe ser la indicada en la siguiente figura

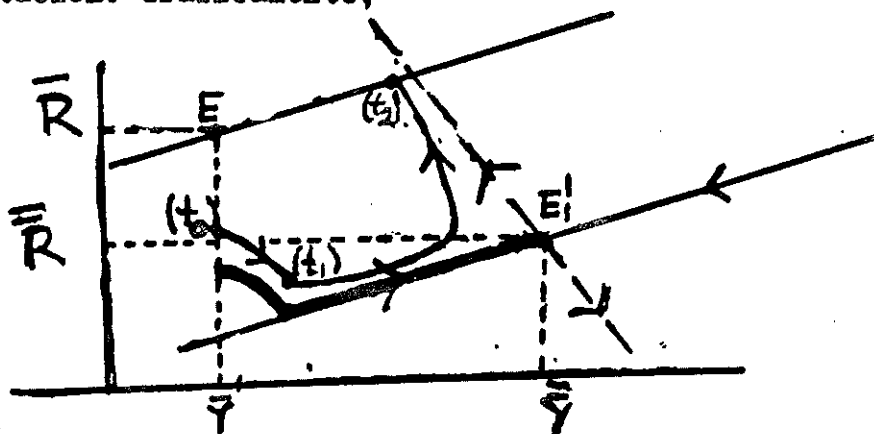


En consecuencia, la trayectoria dada por (25) no toca nunca la recta de convergencia al equilibrio E' . No obstante, y por ser el caso anticipado permanente un límite del que ahora nos ocupa, se puede demostrar fácilmente, que al menos si el periodo $t_2 - t_1$ es relativamente largo, la trayectoria formada por Y, R , permanece muy cerca de E' durante el intervalo temporal (t_1, t_2) , o al menos, durante la mayor parte de este intervalo.

En conclusión, políticas fiscales expansivas, transitorias, además de tener efectos contractivos sobre el output y el empleo inicialmente si son anticipadas, pueden tener ~~efectos~~ mas expansivos que las permanentes. La razón, es que los incentivos especulativos de los agentes que saben que los tipos de interés finalmente caerán, determinan un alza de los tipos de interés durante el periodo transitorio de actuación de la

medida menor que el asociado con el caso en que esa medida hubiera tenido carácter permanente. En consecuencia, el nivel de actividad de la economía durante el periodo transitorio es realmente mayor.

El análisis de un shock monetario ($\bar{c}_1 = c_1, \bar{c}_2 > c_2$) es similar al realizado anteriormente. En este caso, se demuestra igual que antes que Y es creciente ^{Recordando} $(Y' > 0, R' < 0)$ en el intervalo entre el anuncio y la implementación. Gráficamente,



Con trasego está el caso límite (permanente). El trazo normal es el shock monetario anticipado y transitorio. Para demostrar que el gráfico anterior es correcto, sólo hay que probar que la recta divergente de E pasa por debajo de E' , es decir, que

$$u(\bar{Y} - \bar{Y}) - (\bar{R} - \bar{R}) > 0$$

Para esto, recordemos que $(1, u)$ es el autovector de A asociado a λ y en consecuencia

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ u \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ u \end{pmatrix}$$

de donde se deduce

$$u = \frac{a_{11} - \lambda}{-a_{12}}$$

dado que de (13) se deduce que

$$\frac{\bar{R} - \bar{R}}{\bar{Y} - \bar{Y}} = \frac{a_{11}}{-a_{12}}$$

es evidente que

$$u < \frac{\bar{R} - \bar{R}}{\bar{Y} - \bar{Y}}$$

y como $\bar{Y} - \bar{Y} < 0$ resulta $u(\bar{Y} - \bar{Y}) > (\bar{R} - \bar{R})$

En conclusión, los shocks monetarios expansivos anticipados y transitorios, amplifican las fluctuaciones de los tipos de interés, y reducen la efectividad sobre el output y el empleo con respecto al caso en que los mismos shocks son permanentes. Nuevamente, la razón es que los incentivos especulativos de los agentes anticipan la evolución

completa de los tipos de interés.

CASO 4 Shocks No Anticipados y Transitorios

Shocks no anticipados son los similares al caso anterior pero con $t_0 = t_1$, es decir, el anuncio de la medida transitoria tiene lugar al mismo tiempo que la implementación. En consecuencia, los agentes no anticipan la medida. En el instante t_2 los valores de c_1 , y c_2 vuelven a ser los mismos que en el estado inicial.

El problema se puede estudiar directamente (como en los tres casos anteriores), o como caso particular del anterior. Procediendo de la segunda forma, se obtiene de (24) con $t_0 = t_1$, la solución para Y, R en el periodo transitorio de actuación de la medida ($t_0 = t_1, t_2$)

$$Y = \bar{Y} + \frac{w}{v-u} e^{\lambda(t-t_2)} + \frac{w}{v-u} e^{\mu(t_0-t)} - \frac{w'}{v-u} e^{\mu(t_0-t)} - \frac{w}{v-u} e^{(\lambda+\mu)t_0 - \lambda t_2 - \mu t}$$

$$R = \bar{R} + \frac{uw}{v-u} e^{\lambda(t-t_2)} + \frac{v-w}{v-u} e^{\mu(t_0-t)} - \frac{w'}{v-u} e^{\mu(t_0-t)} - \frac{wv}{v-u} e^{(\lambda+\mu)t_0 - \lambda t_2 - \mu t}$$
(31)

que nos da la solución para Y, R . Por otro lado, de (26) se deduce que el salto en t_0 debe tener por valor

$$S = w(1 - e^{\lambda(t_0-t_2)})$$

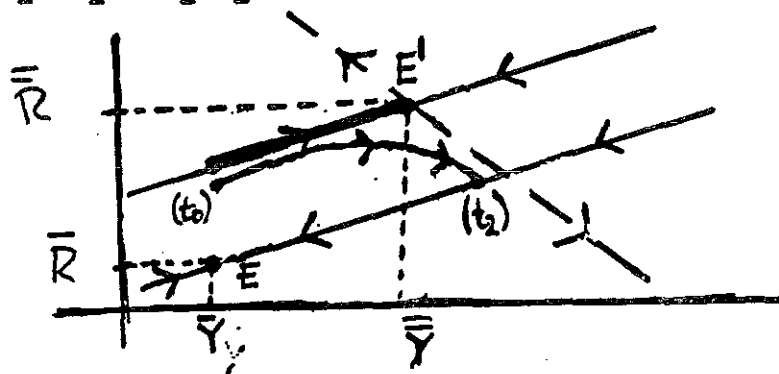
y en consecuencia, el valor del salto anterior crece si crece el periodo transitorio $t_2 - t_0$.

Al igual que en el caso anterior (del que este no es mas que un caso particular especial), se prueba que

$$\lim_{t_2 \rightarrow \infty} S = w$$

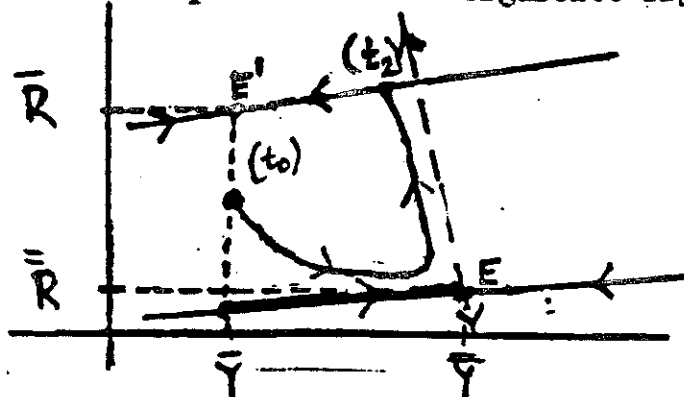
y las funciones dadas por (31), tienden a estar en la recta convergente al equilibrio transitorio (\bar{Y}, \bar{R}) si $t_2 \rightarrow \infty$. Esto quiere decir que el caso 2 es el límite de el actual.

Analizaremos en primer lugar, el shock fiscal no anticipado y transitorio ($\bar{c}_1 > c_1$, $\bar{c}_2 = c_2$). Gráficamente,



En trazo grueso hemos dibujado el caso 2 , (shock fiscal no anticipado y permanente) y en trazo normal el caso transitorio. Dada que el shock no es anticipado por los agentes , no existe efecto contractivo sobre el output y el empleo , y unicamente registramos el efecto altamente expansivo de la medida , ya que , los tipos de interés no aumentan suficientemente debido a los movimientos - expeculativos que conocen la futura evolución de la baja de estos.

En segundo lugar , examinemos un shock monetario expansivo , no anticipado y transitorio ($\bar{c}_1 = c_1$, $\bar{c}_2 > c_2$). El comportamiento del sistema se representa en la siguiente figura



Nuevamente en trazo grueso está dibujado el caso límite (shock monetario no anticipado y permanente) . Es interesante notar que en el caso 4 , el overshooting del tipo de interés se ve reducido con respecto al caso 2 , lo cual se debe a que los movimientos - expeculativos de los agentes determinan una caída del tipo de - interés menor ya que saben que los tipos de interés van a aumentar para volver a los valores iniciales.

V CONCLUSIONES

Este trabajo ha examinado rigurosamente la resolución de un modelo dinámico de ecuaciones simultáneas para una economía bajo previsión perfecta . El análisis ha tratado de exponer un procedimiento general aplicable a todo el conjunto de modelos de este tipo, poniendo - énfasis en la distinción entre shocks transitorios y permanentes por un lado , y anticipados y no anticipados por otro.

Los supuestos fundamentales característicos necesarios e inherentes a este tipo de modelos , han sido rigurosamente formulados , y son los cuatro expuestos al comienzo de la tercera sección. Hemos de hacer notar , que siendo los tres primeros supuestos totalmente admisibles por la realidad económica que reflejan , el cuarto supuesto responde además de a la disminución de los valores de los saltos en t_0 (es decir, a una hipótesis de no "excesiva discontinuidad") , a un comportamiento optimizador por parte de los agentes , y en consecuencia , queda abierta la posibilidad de deducirle mediante un problema de -

optimización matemática.

Hemos analizado también , la dinámica de alternativos shocks, precisando en todo momento la evolución de las variables. Una aplicación económica del modelo de Blanchard (1981) sirve de guía a esta investigación. Se ha demostrado así mismo , que una vez implementadas las medidas de caracter permanente, las economías tenderán muy rapidamente a converger a su equilibrio a largo plazo. Alternativamente, si las medidas tienen caracter transitorio , la economía tiende al equilibrio transitorio durante el periodo transitorio , sobre todo si este es relativamente largo. Cuando dicho periodo está terminando , se aleja del equilibrio transitorio , para empezar a converger a gran velocidad al equilibrio inicial una vez que la medida a sido cancelada. En resumen, la economía está siempre en algún equilibrio , o muy cerca de él.

4.

se

5. E

q

es de

tiempo

del t

la

ráp

el

6. De

NOTAS

1. Específicamente , suponemos en este trabajo que z_1 es constante y positiva . Si hubieramos hecho la hipótesis de que $z_1 > 0$ y $z'_1 > 0$, la esencia de los resultados quedaría inalterada.
2. Para linealizar (2) en torno a $R^* = r = z_2$, diferenciamos (2). $dR' = (2z_2 - r)(R - z_2)$. Dado que $dR' = R' - R'^* = R'$, es inmediato que $R' = z_2(R - r)$.
3. Supongamos que λ_1 y λ_2 fueran los complejos conjugados $\lambda_1 = a + ib$, $\lambda_2 = a - ib$ siendo a y b números reales. Se tiene en consecuencia que $\lambda_1 \lambda_2 = a^2 + b^2 \geq 0$

lo que contradice $|A| < 0$.

4. En efecto , veamos por ejemplo que $u_1 = 0$. De

$$A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

se deduce que

$$\begin{aligned} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 &= \lambda u_1 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 &= \lambda u_2 \end{aligned}$$

Si $u_1 = 0$, entonces necesariamente $a_{12}u_2 = 0$. Como $u_2 \neq 0$ pues (u_1, u_2) es autovector y en consecuencia no nulo, será $a_{12} = 0$, lo que es contrario a nuestro supuesto $a_{12} < 0$. Análogamente, u_2, v_1, v_2 son no nulos.

5. Es interesante señalar, que la hipótesis requiere unicamente que después de un shock,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = \bar{Y} \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} R(t) = \bar{R}$$

es decir, que la economía llegue al nuevo estado estacionario en tiempo "infinito". No obstante, al ser la solución después de t_1 del tipo

$$Y = \bar{Y} + h_2 e^{-\mu t} \quad : \quad R = \bar{R} + h_2 v e^{-\mu t}$$

la convergencia al equilibrio es exponencial, con lo que es muy rápida, y poco después de t_1 estaría prácticamente inmóvil en el nuevo equilibrio.

6. De (19), el salto específico de R en t_0 en este caso será α

$$R(t_0) = v(\bar{Y} - \bar{Y}) + \bar{R}$$

y dado que $\bar{Y} < \bar{\bar{Y}}$, R saltará en t_0 a una posición por debajo de $\bar{\bar{R}}$

7. Nuevamente de (19) se deduce que $R(t_0) = v(\bar{Y} - \bar{\bar{Y}}) + \bar{\bar{R}}$ y como $\bar{\bar{Y}} > \bar{Y}$, R saltará en t_0 también a una posición por debajo de $\bar{\bar{R}}$, y al ser $\bar{\bar{R}} > \bar{R}$ se sigue que R se reduce a un valor por debajo de \bar{R} - ("overshooting" de R).

8. Dado que $t \in (t_0, t_1)$, $(t_0 - t_1) < (t - t_1) < 0$, luego para demostrar que $R' > 0$ necesitamos probar que $-\lambda u > \mu v$. Para ello operamos el sistema $A = MJM^{-1}$, ecuación (7), de donde obtenemos $a_{22} = \frac{1}{v-u} (-u\lambda - \mu v)$; como $a_{22} > 0$ y $v-u > 0$, entonces $-u\lambda - \mu v > 0$, ó equivalentemente, $-u\lambda > \mu v$.

9. La recta $u(Y - \bar{Y}) = (R - \bar{R})$ representa soluciones del sistema

$$\begin{pmatrix} Y' \\ R' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} Y \\ R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{c}_1 \\ \bar{c}_2 \end{pmatrix}$$

de la forma $Y = \bar{Y} + h_1 e^{\lambda t}$: $R = \bar{R} + u h_1 e^{\lambda t}$

que divergen al infinito si t tiende a infinito.

10. La demostración es similar a la realizada en la Nota 8.

APENDICE I

El sistema (23) puede expresarse matricialmente como

$$\begin{bmatrix} e^{-\lambda t_1} & , & e^{\lambda t_0 + \mu(t_0 - t_1)} - e^{\lambda t_1} \\ ve^{-\lambda t_1} & , & ve^{\lambda t_0 + \mu(t_0 - t_1)} - ue^{\lambda t_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_2 \\ h'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y} - \bar{Y} - \frac{w}{v-u} e^{\lambda(t_1 - t_2)} \\ \bar{R} - \bar{R} - \frac{uw}{v-u} e^{\lambda(t_1 - t_2)} \end{bmatrix}$$

Si el determinante de la matriz de coeficientes de las incógnitas h_2 , y h'_1 es distinto de cero, el sistema puede resolverse por la regla de Cramer. Operando la matriz para obtener su determinante , primero la descomponemos de la siguiente forma

$$\begin{vmatrix} e^{-\lambda t_1} & , & e^{\lambda t_0 + \mu(t_0 - t_1)} \\ ve^{-\lambda t_1} & , & ve^{\lambda t_0 + \mu(t_0 - t_1)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} e^{-\lambda t_1} & , & e^{\lambda t_1} \\ ve^{-\lambda t_1} & , & e^{\lambda t_1} \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - e^{-\lambda t_1 + \lambda t_1} \begin{vmatrix} 1 & , & 1 \\ v & , & u \end{vmatrix} = (v-u)e^{(\lambda - \mu)t_1} \neq 0$$

Operando por Cramer obtenemos

$$h_2 = \frac{\begin{vmatrix} \bar{Y} - \bar{Y} - \frac{w}{v-u} e^{\lambda(t_1 - t_2)} & , & e^{\lambda t_0 + \mu(t_0 - t_1)} - e^{\lambda t_1} \\ \bar{R} - \bar{R} - \frac{uw}{v-u} e^{\lambda(t_1 - t_2)} & , & ve^{\lambda t_0 + \mu(t_0 - t_1)} - ue^{\lambda t_1} \end{vmatrix}}{(v-u)e^{(\lambda - \mu)t_1}}$$

El numerador lo podemos descomponer en suma de cuatro determinantes

$$\begin{vmatrix} \bar{Y} - \bar{Y} & , & e^{\lambda t_0 + \mu(t_0 - t_1)} \\ \bar{R} - \bar{R} & , & ve^{\lambda t_0 + \mu(t_0 - t_1)} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bar{Y} - \bar{Y} & , & e^{\lambda t_1} \\ \bar{R} - \bar{R} & , & ue^{\lambda t_1} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{w}{v-u} \begin{vmatrix} e^{\lambda(t_1 - t_2)} & , & e^{\lambda t_0 + \mu(t_0 - t_1)} \\ ue^{\lambda(t_1 - t_2)} & , & ve^{\lambda t_0 + \mu(t_0 - t_1)} \end{vmatrix}$$

$$+ \frac{w}{v-u} e^{\lambda t_1} \begin{vmatrix} e^{\lambda(t_1-t_2)} & , & 1 \\ u e^{\lambda(t_1-t_2)} & , & u \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda t_0 + \mu(t_0-t_1)} w - e^{\lambda t_1} (u(\bar{Y}-\bar{Y}) - (\bar{R}-\bar{R})) - \frac{w}{v-u} (v-u) e^{(\lambda-\mu)t_1 + (\lambda+\mu)t_0 - \lambda t_2}$$

ya que el último determinante es obviamente cero. En consecuencia,

$$h_2 = \frac{w}{v-u} e^{\lambda(t_0-t_1) + \mu t_0} - \frac{w}{v-u} e^{\mu t_1} - \frac{w}{v-u} e^{\lambda(t_0-t_2) + \mu t_0}$$

Del sistema anterior, y usando la misma regla de Cramer, se deduce

$$h'_1 = \frac{\begin{vmatrix} e^{-\mu t_1} & , & \bar{Y}-\bar{Y} - \frac{w}{v-u} e^{\lambda(t_1-t_2)} \\ v e^{-\mu t_1} & , & \bar{R}-\bar{R} - \frac{uw}{v-u} e^{\lambda(t_1-t_2)} \end{vmatrix}}{(v-u) e^{(\lambda-\mu)t_1}}$$

El determinante del numerador se puede calcular mediante

$$e^{-\mu t_1} \begin{vmatrix} 1 & , & \bar{Y}-\bar{Y} \\ v & , & \bar{R}-\bar{R} \end{vmatrix} - e^{-\mu t_1} \begin{vmatrix} 1 & , & \frac{w}{v-u} e^{\lambda(t_1-t_2)} \\ v & , & \frac{uw}{v-u} e^{\lambda(t_1-t_2)} \end{vmatrix} =$$

$$= -w e^{-\mu t_1} - \frac{w}{v-u} e^{-\mu t_1} \begin{vmatrix} 1 & , & 1 \\ v & , & u \end{vmatrix} e^{\lambda(t_1-t_2)} =$$

$$= -w e^{-\mu t_1} + w e^{-\mu t_1} e^{\lambda(t_1-t_2)}$$

y por lo tanto se tiene

$$h'_1 = \frac{w}{v-u} (e^{-\lambda t_2} - e^{-\lambda t_1})$$

REFERENCIAS

1. Blanchard O. "Backward and Forward Solutions for Economies with Rational Expectations" . AER Proc. Mayo 1979 pp 114-18
2. Blanchard O. "Output , the Stock Market , and Interest Rates". AER 1981 pp 132-143
3. Dou A. "Ecuaciones Diferenciales Ordinarias" . Editorial Dossat . Madrid 1969
4. Gandolfo G. "Mathematical Methods and Models in Economic Dynamics". North-holland. 1971
5. Guzmán M. "Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Teoría de Estabilidad y Control" . Alhambra 1975
6. Sargent T. y Wallace N. " The Stability of Models of Money and Growth with Perfect Foresight". Econometría , Nov 1973 pp 1043-48
7. Wilson C. "Anticipated Shocks and Exchange Rate Dynamics". J.P.E. 1979 , 639-47.